

Loi d'inertie de Sylvester

Théorème: Soit E $\mathbb{R}$ -Ev. $\dim E = n$, $q \in Q(E)$. Il existe des bases q -orthogonales de E .

Si $n=1$ ou $q=0$, toute base de E est q -orthogonale. Supposons $q \neq 0$ et le résultat venant au rang $n-1 \geq 1$.

On a $x \in E$, $q(x) \neq 0$, et on pose $f: y \in E \mapsto \varphi(x, y) \in \mathbb{R}$. Alors $f \in E^* \setminus \{0\}$ et $H = \text{Ker } f$ hyperplan, avec

$E = H \oplus \text{Vect}\{x\}$. Par (H.R.), on a $(e_i)_{i=1}^{n-1}$ base de H , $q_{H|H}$. On pose $x = e_n$, et on a $(e_i)_{i=1}^n$ base de E q -orthogonale.

Théorème: Soit $q \in Q(E)$. Alors $\exists (s, t) \in \mathbb{N}^2$, $\exists (e_i)_{i=1}^{s+t} \in (E^*)^{s+t}$ libre tel que $q = \sum_{i=1}^s e_i^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} e_j^2$.

Existence

On a $e = (e_i)_{i=1}^n$ base de E q -orthogonale. On considère $e^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale. Alors $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^{*2} \text{ où } \lambda_i = q(e_i). \text{ Quitte à réordonner } e, \text{ on peut supposer } \lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$$

$\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+t} < 0$ et $\lambda_{s+t+1}, \dots, \lambda_n = 0$. On peut écrire $\forall i \in \{1, s+t+1, \dots, n\}$ $|\lambda_i| = p_i^2$, $p_i \in \mathbb{R}^+$ et on pose

$$e_i = p_i e_i^* \in E^*. \text{ Alors } (e_i)_{i=1}^{s+t} \text{ est libre et } q = \sum_{i=1}^s e_i^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} e_j^2.$$

Unicité

Supposons $\exists (s', t') \in \mathbb{N}^2$ et $(e'_i)_{i=1}^{s'+t'}$ libre tel que $q = \sum_{i=1}^{s'} e_i'^2 - \sum_{j=s'+1}^{s'+t'} e_j'^2$. On complète la famille tel que

$(e'_i)_{i=1}^{s'+t'}$ base de E^* . On considère e' base préduale de e' , alors e' base de E q -orthogonale. On a alors

$$[q]_e = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } [q]_{e'} = \begin{pmatrix} I_{s'} & & \\ & -I_{t'} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } s+1 = s'+1 \text{ et } t = t'. \text{ On pose } F = \text{Vect}\{e_i\}_{i=1}^s, G = \text{Vect}\{e_j\}_{j=s+1}^{s+t}$$

Si $s=0$, $F \cap G = \{0\}$. Sinon $q_H > 0$ et $q_G < 0$ donc $F \cap G = \{0\}$. Alors la formule de Grassman

donne $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = s + n - s' \leq n$, d'où $s \leq s'$. Par symétrie, $s = s'$ et $t = t'$.

Lemme: Soit $F \subset E$ sEv. On a $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \text{Ker } q)$. On a q_H non dégénérée $\Leftrightarrow F \oplus F^\perp = E$

On considère $f: x \in F \mapsto \varphi(x, \cdot) \in E^*$ linéaire. On a $\text{Ker } f = F \cap \text{Ker } q$ et $(\text{Im } f)^\circ = F^\perp$ car

$y \in (\text{Im } f)^\circ \Leftrightarrow \forall x \in F, \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y \in F^\perp$. Par théorème du rang, on a donc

$\dim F + \dim F^\perp = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f + \dim (\text{Im } f)^\circ = \dim(F \cap \text{Ker } q) + \dim E$. De plus, on a

$F \cap \text{Ker } q = \text{Ker } q_H = F \cap F^\perp$. Donc q_H non dégénérée $\Leftrightarrow F \cap F^\perp = \{0\}$ et $\dim F \cap \text{Ker } q = 0 \Leftrightarrow F \oplus F^\perp = E$

Application: Soit $P = \{F \subset E \mid q_H > 0\}$, $N = \{F \subset E \mid q_H < 0\}$, $s = \max_{F \in P} \dim F$, $t = \max_{F \in N} \dim F$. Alors $\text{sgn } q = (s, t)$

Par définition de $\text{sgn } q = (s, t)$, on a $s \leq s'$ et $t \leq t'$. Si $P = \emptyset$, $s = s' = 0$. Sinon $\exists F \in P$, $\dim F = s$

Soit $(e_i)_{i=1}^s$ base de F q -orthogonale, compléter telle que $(e_i)_{i=1}^n$ base q -orthogonale de $E = F \oplus F^\perp$. Puisque F est de

dimension maximale, $q(e_{s+1}), \dots, q(e_n) \leq 0$. Par unicité, $s = s'$, et de la même façon $t = t'$.

Exemple: $a \in \mathbb{R}$, $q(x, y, z) := x^2 + (1+a)y^2 + (1+aa^2)z^2 + 2xy - 2ayz$ sur $\mathbb{R}^3$.

On a $q(x, y, z) = (x+y)^2 + ay^2 + (1+aa^2)z^2 - 2ayz = (x+y)^2 + a(y-z)^2 + (1+a^2)z^2$.

Si $a=0$, $\text{rg}(q)=2$, sinon $\text{rg}(q)=3$ et q non dégénérée. Si $a>0$ $\text{sgn}(q)=(3,0)$. Si

$a<0$, $\text{sgn}(q)=(2,1)$. On a $l_1 = e_1^* + e_2^*$, $l_2 = e_1^* - e_2^*$, $l_3 = e_3^*$ donc $Q = P_{\text{orth}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $P = P_{\text{orth}} = {}^t Q^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,1,1)\}$ base L_q de

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+aa^2 \end{pmatrix}$ ou ${}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$.

Exemple: $q(x, y, z) = xy + yz + xz$

On a avec $u = x+y$, $v = x-y$, $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$

$q(x, y, z) = \frac{1}{4}(u^2 - v^2) + \frac{1}{2}(u-v)z + \frac{1}{2}(u+v)z = \frac{1}{4}(u^2 - v^2 - 4vz) = \frac{1}{4}[(u-2z)^2 - 4z^2 - v^2]$
 $= \frac{1}{4}(x+y+2z)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 - z^2$

Donc $\text{sgn}(q) = (1,2)$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = {}^t Q^{-1}$ et ${}^t P A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.